Combinaisons

Combien de sous-ensembles de taille k peut-on tirer dans un ensemble de n éléments distincts ?

Exemples :

- De combien de manière puis-je choisir 5 livres dans ma collection de 100 livres ?
- Combien ai-je de chance de gagner le gros lot au lotto en choisissant mes 6 numéros complètement au hasard ?

On note ce nombre C_n^k (ou bien $\binom{n}{k}$ en notation anglo-saxone).

Propriété : Le nombre de sous-ensembles de taille k d'un ensemble à n éléments est

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dérivation de C_n^k

Par la règle des produits cartésiens généralisés, le nombre de séquences construites à partir de k éléments distincts tirés d'un ensemble de taille n est :

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Il existe une fonction $k!$-vers-1 de chaque séquence vers l'ensemble des éléments qu'elle contient :

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \{x_1, x_2, x_3\}$$

Par la règle de division, on obtient :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Dérivation alternative

- Le nombre de permutations de n éléments est $n!$.
- Soit la fonction f qui fait correspondre chaque permutation à l'ensemble de ses k premiers éléments.
- Toutes les permutations avec les mêmes k premiers éléments (en ordre quelconque) et les mêmes $n-k$ derniers éléments (en ordre quelconque) sont envoyés par f sur le même ensemble de k éléments.
- f est donc une fonction $n!(n-k)!$-vers-1
- Par la règle de division : $C_n^k = \frac{n!}{n!(n-k)!}$.

Séquences de bits

Combien de séquences de n bits contiennent exactement k "1" ?

Il existe une bijection entre ces séquences et les sous-ensembles de k éléments choisis parmi n.

Exemple : $k = 5$, $n = 10$

sous-ensemble :	$\{$		$x_2,$	$x_3,$		$x_5,$		$x_7,$			x_{10} $\}$
séquence :	$($	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1 $)$

Corollaire : Le nombre de séquences de n bits avec exactement k "1" est C_n^k.

Application

On a montré (slide 280) qu'il existait une bijection entre :

- A=L'ensemble des manières de sélectionner 12 objets lorsqu'il en existe 5 sortes différentes ;
- B=L'ensemble des séquences de 16 bits comportant exactement quatre “1”.

$$\underbrace{00}_{\text{Sorte A}}\quad 1\quad \underbrace{}_{\text{Sorte B}}\quad 1\ \underbrace{000000}_{\text{Sorte C}}\ 1\quad \underbrace{00}_{\text{Sorte D}}\quad 1\quad \underbrace{00}_{\text{Sorte E}}$$

On a donc $|A| = |B| = C_{16}^{4}$.

Combinaisons avec répétitions

On peut généraliser pour conclure qu'il existe une bijection entre :

- A=L'ensemble des manières de sélectionner k éléments avec répétition parmi n (*combinaisons avec répétition*) ;
- B=L'ensemble des séquences de $n+k-1$ bits comportant exactement $n-1$ "1".

On a donc $|A| = |B| = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$.

Propriété : Le nombre de combinaisons avec répétitions de k éléments choisis parmi n est :

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Séquences de sous-ensembles

C_n^k est aussi le nombre de manière de diviser un ensemble de n éléments en deux sous-ensembles l'un de taille k, l'autre de taille $n - k$.

Combien y a-t-il de partitions possibles d'un ensemble de n éléments en m sous-ensembles de tailles respectives k_1, k_2, $\ldots$, k_n ?

Propriété : Le nombre de sous-ensembles de taille k d'un ensemble à n éléments est

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

On note ces nombres $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ et on les appelle les coefficients multinomiaux.

Dérivation

- Soit un ensemble A de n éléments.
- On peut faire correspondre une permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de A à une séquence $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ de m sous-ensembles de tailles respectives $k_1, k_2, \ldots, k_m$ en prenant les k_1 premiers éléments comme sous-ensemble A_1, les k_2 éléments suivants comme sous-ensemble A_2,. . ., et les k_m derniers éléments comme sous-ensemble A_m.
- Toute permutation qui ne modifie pas la répartition des éléments dans les m blocs est envoyée vers la même partition.
- La correspondance est donc $k_1!k_2!\ldots k_m!$-vers-1.
- Par la règle de division, on obtient :

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Application : séquences avec répétitions

De combien de façons distinctes peut-on arranger les lettres du mot *BOOKKEEPER* ?

Réponse :

- Il y a un B, deux O, deux K, trois E, un P et un R dans *BOOKKEEPER*.
- Il existe une bijection entre les arrangements de *BOOKKEEPER* et les partitions de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ en 6 sous-ensembles de tailles respectives $1, 2, 2, 3, 1, 1$.
- Exemple :
  $BOOKKEEPER \rightarrow (\underbrace{\{1\}}_{B}, \underbrace{\{2, 3\}}_{O}, \underbrace{\{4, 5\}}_{K}, \underbrace{\{6, 7, 9\}}_{E}, \underbrace{\{8\}}_{P}, \underbrace{\{10\}}_{R})$
- Le nombre d'arrangements est :

$$\frac{10!}{1!2!2!3!1!1!} = 151200$$

Règle du bookkepper

Propriété : Le nombre de séquences contenant n_1 copies de l_1, n_2 copies de l_2, ..., et n_k copies de l_k est

$$\frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!},$$

pour autant que $l_1, l_2, \ldots, l_k$ soient distincts.

Binôme de Newton

Question : Quel est le coefficient de $a^{n-k}b^k$ dans le développement de $(a+b)^n$?

Exemple :

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= aaaa + aaab + aaba + aabb \\ &+ abaa + abab + abba + abbb \\ &+ baaa + baab + baba + babb \\ &+ bbaa + bbab + bbba + bbbb\end{aligned}$$

Observation : Il y a un terme pour chaque séquence, de longueur n, composée de a et de b.

Réponse : Le nombre de termes contenant k copies de b et $n-k$ copies de a est donc

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Théorème : Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Formule du multinôme de Newton

Théorème : Pour tous $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(z_1+z_2+\ldots+z_m)^n = \sum_{k_1,\ldots,k_m \in \mathbb{N} | k_1+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_m^{k_m}$$

Exemple : $\binom{10}{1,2,2,3,1,1}$ est le coefficient de $bo^2k^2e^3pr$ dans le développement de $(b+o+k+e+p+r)^{10}$.

Mains de poker

- Dans un jeu de cartes, il y a 52 cartes.
- Chaque carte a une couleur et une valeur.
- Couleurs possibles : $\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit$.
- Valeurs possibles : 2,3,4,5,6,7,8,9,V,D,R,A.
- Une main est un ensemble de 5 cartes parmi les 52 disponibles.
- Nombre total de mains : $C_{52}^{5} = 2.598.960$.

- Un carré est une main contenant 4 cartes de la même valeur.
- Exemple : $\{8\spadesuit, 8\diamondsuit, D\heartsuit, 8\heartsuit, 8\clubsuit\}$.
- Un carré est caractérisé par
  - La valeur des 4 cartes ;
  - La valeur de la carte supplémentaire ;
  - La couleur de la carte supplémentaire.
- L'ensemble des carrés peut être mis en bijection avec l'ensemble des séquences composées de deux valeurs distinctes suivies d'une couleur.
- Exemple : $(8, D, \heartsuit) \leftrightarrow \{8\spadesuit, 8\diamondsuit, D\heartsuit, 8\heartsuit, 8\clubsuit\}$.
- Il y a donc $13 \cdot 12 \cdot 4 = 624$ mains contenant un carré (une sur 4165).

- Une main pleine est une main contenant 3 cartes d'une valeur et deux cartes d'une autre valeur.
- Exemple : $\{2\spadesuit, 2\clubsuit, 2\diamondsuit, V\clubsuit, V\diamondsuit\}$.
- Une main pleine est caractérisée par
  - La valeur du brelan (3 cartes d'une même valeur) ;
  - Les couleurs du brelan ;
  - La valeur de la paire ;
  - Les couleurs de la paire.
- Il y a donc

$$13 \cdot \underbrace{C_4^3}_{4} \cdot 12 \cdot \underbrace{C_4^2}_{6} = 3.744$$

mains pleines différentes.

- Une double paire est une main contenant 2 cartes d'une valeur et deux cartes d'une autre valeur.
- Exemple : $\{3\diamondsuit, 3\spadesuit, D\diamondsuit, D\heartsuit, A\clubsuit\}$.
- Une double paire est caractérisée par
  - Les valeurs des deux paires ;
  - Les couleurs de la première paire ;
  - Les couleurs de la deuxième paire ;
  - La valeur de la carte supplémentaire ;
  - La couleur de la carte supplémentaire.
- Il y a donc

$$\underbrace{C_{13}^2}_{78} \cdot \underbrace{C_4^2}_{6} \cdot \underbrace{C_4^2}_{6} \cdot 11 \cdot \underbrace{C_4^1}_{4} = 123.552$$

doubles paires différentes.

- Combien de mains contiennent au moins une carte de chaque couleur ?
- Exemple : $\{7\diamondsuit, R\clubsuit, 3\diamondsuit, A\heartsuit, 2\spadesuit\}$.
- Une telle main est décrite par
  - Les valeurs du $\diamondsuit$, du $\clubsuit$, du $\heartsuit$ et du $\spadesuit$;
  - La couleur de la carte supplémentaire ;
  - La valeur de la carte supplémentaire.
- Remarque :

$$\begin{array}{l} (7, R, A, 2, \diamondsuit, 3) \searrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \{7\diamondsuit, R\clubsuit, A\heartsuit, 2\spadesuit, 3\diamondsuit\} \\ (3, R, A, 2, \diamondsuit, 7) \nearrow \end{array}$$

- Il s'agit d'une correspondance 2-vers-1.
- Le nombre de possibilités est donc de $\dfrac{13^4 \cdot 4 \cdot 12}{2}$.

Démonstrations combinatoires

Définition : Une *démonstration combinatoire* est un argument qui établit une propriété algébrique en utilisant des techniques de dénombrement.

Théorème : $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Démonstration algébrique :

- $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $\square$

Démonstration combinatoire : *Sélectionner k objets parmi n est équivalent à déterminer les $n-k$ objets qui ne seront pas choisis.* $\square$

Question : Un concours est organisé, et, parmi un ensemble de n personnes (dont une personne A), k personnes doivent être sélectionnées pour y participer. Combien de sélections possibles existe-t-il ?

Réponse 1 :

- Si A est sélectionné, il reste $k-1$ personnes à sélectionner parmi les $n-1$ restantes : C_{n-1}^{k-1} possibilités.
- Si A n'est pas sélectionné, il reste k personnes à sélectionner parmi les $n-1$ restantes : C_{n-1}^{k} possibilités.
- Les deux ensembles d'équipes sont disjoints.
- On a donc $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$ possibilités.

Réponse 2 :

- Il y a k personnes à sélectionner parmi n.
- Le nombre de sélections possibles vaut donc C_n^k.

Conclusion (Formule de Pascal) :

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k.$$

Une démonstration plus formelle

- Soit S l'ensemble de tous les sous-ensembles de taille k des entiers $\{1, \ldots, n\}$.
- On sait déjà que $|S| = C_n^k$.
- Soient les deux ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{(1, X) | X \subseteq \{2, \ldots, n\} \wedge |X| = k - 1\} \\ B & = & \{(0, Y) | Y \subseteq \{2, \ldots, n\} \wedge |Y| = k\} \end{array}$$

- A et B sont clairement disjoints (le premier élément de la paire est différent) et donc :

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

avec

$$\begin{array}{rcl} |A| & = & C_{n-1}^{k-1} \\ |B| & = & C_{n-1}^{k} \end{array}$$

- Soit la fonction $f : (A \cup B) \rightarrow S$:

$$f(c) = \begin{cases} X \cup \{1\} & \text{si } c = (1, X), \\ Y & \text{si } c = (0, Y). \end{cases}$$

- f est une bijection de $A \cup B$ vers S.
- On a donc $|S| = |A| + |B|$, ce qui prouve le théorème. $\square$

Un modèle pour les démonstrations combinatoires

1. Définir un ensemble S ;
2. Démontrer que $|S| = n$ en le dénombrant d'une manière ;
3. Démontrer que $|S| = m$ en le dénombrant d'une autre manière ;
4. Conclure que $|S| = n = m$.

Application

Théorème :

$$\sum_{r=0}^{n} C_n^r C_{2n}^{n-r} = C_{3n}^n.$$

Démonstration (combinatoire) :

- Soit S l'ensemble des mains à n cartes qui peuvent être obtenues en mélangeant
  - un jeu de n cartes rouges (numérotées $1, 2, \ldots, n$)
  - avec un jeu de $2n$ cartes noires (numérotées $1, 2, \ldots, 2n$).
- D'une part, on a

$$|S| = C_{3n}^n.$$

- D'autre part :
  - Le nombre de mains contenant exactement r cartes rouges est
$$C_n^r C_{2n}^{n-r}.$$
  - Le nombre de cartes rouges est compris entre 0 et n.
  - Le nombre total de mains à n cartes vaut donc :
$$|S| = \sum_{r=0}^{n} C_n^r C_{2n}^{n-r}.$$

$\square$

Remarque : Pour démontrer une égalité de manière combinatoire, il est souvent plus facile de définir l'ensemble S sur base du membre ayant la forme la plus simple, comme dans l'exemple précédent.

Un tour de magie

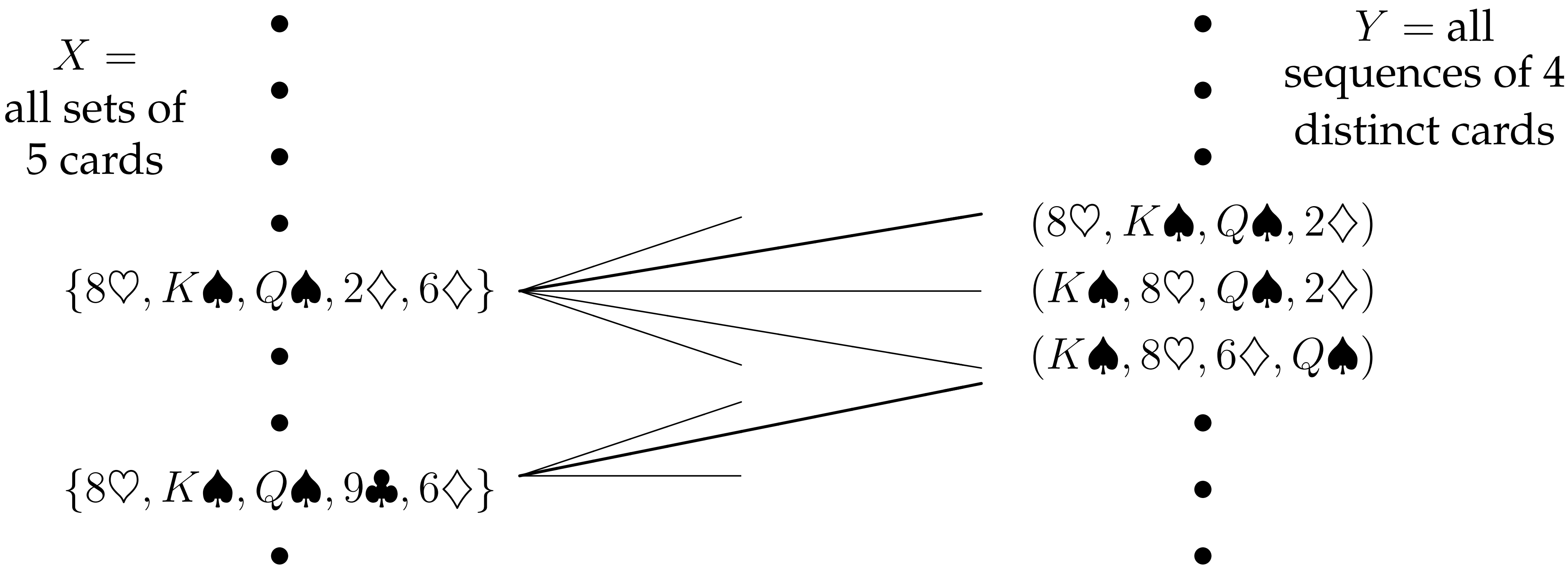
- Un magicien envoie son assistant dans le public avec un jeu de carte
- 5 personnes choisissent une carte dans le jeu
- L'assistant révèle 4 de ces 5 cartes
- Le magicien annonce la carte restante

Première idée

- L'assistant et le magicien conviennent d'un ordre sur les cartes
- Exemple :
  $1\heartsuit < \ldots < R\heartsuit < 1\clubsuit < \ldots < 1\diamondsuit < \ldots < 1\spadesuit < \ldots$
- L'assistant pourrait coder la carte manquante par l'ordre dans lequel les 4 cartes sont présentées.
- Exemple : $(1, 2, 3, 4) \to 1\heartsuit$, $(1, 2, 4, 3) \to 2\heartsuit$, etc.
- Problème : il n'y a que $4! = 24$ ordres possibles alors qu'il faut pouvoir coder 48 cartes

Le secret

- L'assistant peut choisir la carte qui va rester cachée et l'ordre dans lequel les 4 cartes seront dévoilées.
- Soit X tous les ensembles de 5 cartes (*non ordonnées*) et Y tous les séquences de 4 cartes distinctes (*ordonnées*)
- Définissons un graphe biparti entre X et Y : $x \in X$ est connecté à $y \in Y$ si les 4 cartes de la séquence y sont dans l'ensemble x.
- Pour que le codage de la cinquième carte soit possible à partir d'une séquence de 4 cartes, il faut qu'une correspondance existe dans le graphe biparti entre X et Y (c'est-à-dire une association de chaque $x \in X$ avec un élément distinct de Y).



$X =$ all sets of 5 cards
$Y =$ all sequences of 4 distinct cards
$\{8\heartsuit, K\spadesuit, Q\spadesuit, 2\diamondsuit, 6\diamondsuit\}$
$\{8\heartsuit, K\spadesuit, Q\spadesuit, 9\clubsuit, 6\diamondsuit\}$
$(8\heartsuit, K\spadesuit, Q\spadesuit, 2\diamondsuit)$
$(K\spadesuit, 8\heartsuit, Q\spadesuit, 2\diamondsuit)$
$(K\spadesuit, 8\heartsuit, 6\diamondsuit, Q\spadesuit)$

- On doit montrer que la condition du théorème de Hall est vérifiée.

- Théorème de Hall (rappel) : Soit $G = (L \cup R, E)$ un graphe biparti tel que toute arête a une extrémité dans L et l'autre extrémité dans R. Il existe une correspondance pour les sommets de L si et seulement si $|S| \leq |N(S)|$ pour tout $S \subseteq L$
($N(S)$ est l'ensemble des sommets n'appartenant pas à S, mais adjacents à au moins un sommet de S).

- Définition : Un graphe biparti G est de *degré contraint* si $\deg(l) \geq \deg(r)$ pour tout $l \in L(G)$ et $r \in R(G)$

Théorème : Soit G un graphe biparti de degré contraint. Il existe une correspondance pour les sommets de L.

Démonstration :

- Montrons que G satisfait la condition de Hall.
- Vu la contrainte de degré, il existe d tel que $\deg(l) \geq d \geq \deg(r)$ pour tout $l \in L$ and $r \in R$.
- Soit $S \subseteq L$ un sous-ensemble de L.
- Tout sommet de $N(S)$ est incident à au plus d arêtes :

$$d|N(S)| \geq \text{“Nb arêtes incidentes à S”}.$$

- Tout sommet de S est l'extrémité d'au moins d arêtes :

$$\text{“Nb arêtes incidentes à S”} \geq d|S|.$$

- En combinant, on a $d|N(S)| \geq d|S|$ et donc $|N(S)| \geq |S|$. □

- Dans le graphe biparti qui nous intéresse, chaque nœud de gauche est de degré $120 (= 5 \cdot 4!)$ et chaque noeud de droite est de degré 48.
- Le graphe est donc de degré contraint et donc, par le théorème précédent, il existe une correspondance pour les sommets de gauche
- En s'accordant sur cette correspondance, le magicien et l'assistant peuvent réaliser leur tour.

- Problème : Il y a $C_{52}^{5} \approx 2600000$ correspondances à mémoriser. Impossible sans un truc supplémentaire.

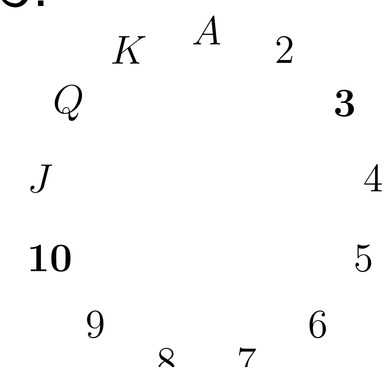
Le vrai truc

Un exemple de codage facile à retenir :

Exemple : Supposons que les 5 cartes soient :

$$10\heartsuit \quad 9\diamondsuit \quad 3\heartsuit \quad D\spadesuit \quad V\diamondsuit$$

- L'assistant choisit 2 cartes de la même couleur (c'est toujours possible par le principe des tiroirs).
  Ex : $10\heartsuit$ et $3\heartsuit$.
- L'assistant détermine le rang de ces deux cartes sur le cycle ci-dessous. Une des deux cartes est toujours à 6 sauts ou moins de l'autre dans le sens anti-horlogique.
  Ex :10 est à 6 sauts de 3.



- Cette carte est la première carte révélée, l'autre est la carte secrète.
  Ex : Le 10♡ est révélé, le 3♡ est la carte que le magicien doit retrouver.
- L'assistant et le magicien s'accorde sur un ordre entre les cartes et l'assistant code le nombre de saut selon le schéma suivant :

$$\begin{aligned}
(\text{petite carte}, \text{moyenne carte}, \text{grande carte}) &= 1\\
(\text{petite carte}, \text{grande carte}, \text{moyenne carte}) &= 2\\
(\text{moyenne carte}, \text{petite carte}, \text{grande carte}) &= 3\\
(\text{moyenne carte}, \text{grande carte}, \text{petite carte}) &= 4\\
(\text{grande carte}, \text{petite carte}, \text{moyenne carte}) &= 5\\
(\text{grande carte}, \text{moyenne carte}, \text{petite carte}) &= 6
\end{aligned}$$

Ex : Soit l'ordre $1\clubsuit < \ldots < R\clubsuit < 1\diamondsuit < \ldots < 1\heartsuit < \ldots < 1\spadesuit \ldots$, l'assistant révèle la séquence suivante :

$$10\heartsuit \quad D\spadesuit \quad V\diamondsuit \quad 9\diamondsuit$$

Avec 4 cartes ?

Le tour est-il possible avec 4 cartes ? Non.

- On aurait dans ce cas $|X| = C_{52}^{4} = 270725$ (par la règle du sous-ensemble) et $|Y| = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$ (par le produit cartésien généralisé). Par conséquent, $|X| > 2|Y|$.
- Par le principe des tiroirs généralisés, toute correspondance $f : X \rightarrow Y$ enverra au moins 3 éléments distincts de X vers le même élément de Y.
- Il n'est donc pas possible de coder de manière non ambigüe une carte cachée avec 3 cartes.

Un problème de dénombrement plus complexe

De combien de manière peut-on remplir un panier avec n fruits avec les contraintes suivantes ?

- Le nombre de pommes doit être pair
- Le nombre de bananes doit être un multiple de 5
- Le panier ne peut pas contenir plus que 4 oranges
- Le panier ne peut pas contenir plus qu'une poire