

Introduction à la théorie de l'informatique

Examen écrit du lundi 3 septembre 2012

Durée : 4 heures maximum.

Lisez les consignes avant de commencer l'examen :

- Commencez par inscrire vos nom, prénom et matricule en haut de chaque page. Vous pouvez détacher les feuilles d'examen si vous le souhaitez.
- Exposez votre raisonnement de manière claire et complète si vous voulez avoir le maximum de points. Il n'est pas suffisant de donner simplement la solution finale.
- Pour les questions demandant une réponse finale numérique, entourez ou identifiez clairement la réponse finale.
- Soyez bref et concis, mais précis. Les propositions incorrectes ou hors-sujet vous feront perdre des points.
- Vous avez le droit d'utiliser **uniquement** l'ouvrage de référence et les transparents du cours théorique.
- Vous ne pouvez communiquer avec personne excepté les examinateurs pendant l'examen. Toute personne surprise à tricher recevra une note de 0/20 pour l'examen et s'expose à des sanctions.
- Cet examen comporte 6 questions. Vérifiez que vous avez bien les 6 questions sur vos feuilles d'énoncé!
- Sauf indications contraires, tous les graphes sont simples (non multigraphes) et non-orientés. Ils ne contiennent donc aucune boucle (arêtes dont les deux extrémités arrivent au même sommet) et ont au plus une arête joignant les deux mêmes sommets.

Bon travail!

1. (a) Montrez qu'il n'est pas possible de construire un graphe de 2 nœuds ou plus où chaque nœud a un degré distinct des autres nœuds.
 - (b) Montrez que dans tout graphe, pour tout nœud de degré impair, il existe un chemin de ce nœud vers un autre nœud de degré impair.
2. Soient p et q deux nombres premiers. Montrez que

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

3. Un programme informatique considère un chaîne constituée de chiffres décimaux comme un mot de passe valide si elle contient un nombre pair de chiffres 0. Par exemple "1230407869" et "12345" sont des mots de passe valide mais "120987045608" et "012879" ne le sont pas. On considérera que la chaîne vide est un mot de passe valide (de longueur 0). Soit T_n le nombre de mots de passe valides de longueur n .
 - (a) Montrez que $T_n = 8T_{n-1} + 10^{n-1}$ pour tout $n \geq 2$
 - (b) Trouvez une formulation analytique de T_n en résolvant la récurrence.

4. Soit la récurrence de Fibonacci :

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

Sans résoudre la récurrence, montrez que :

- (a) F_{5n} est divisible par 5 pour $n = 1, 2, 3, \dots$
Suggestion : Montrez d'abord que les nombres de Fibonacci satisfont la récurrence

$$F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5} \text{ pour } n \geq 5$$

avec les conditions initiales $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2$ et $F_4 = 3$.

- (b) $\text{pgcd}(F_{n+1}, F_n) = 1$ pour $n \geq 0$.

Nom : Prénom : Matricule :

5. Parmi N personnes interrogées sur leur goût en matière de glaces :

- 78 aiment le chocolat,
- 32 aiment la fraise,
- 57 aiment la vanille,
- 13 aiment le chocolat et la fraise,
- 21 aiment la fraise et la vanille,
- 16 aiment la vanille et le chocolat,
- 5 aiment les trois goûts,
- 14 n'aiment aucun des trois goûts.

Que vaut N ?

6. Après une soirée, un groupe de 20 personnes se partage une addition de 15 euros. Les 18 premières personnes n'ont qu'une pièce de 1 euro chacune, la 19ème personne a une pièce de 1 euro et une pièce de 2 euros, et la 20ème personne a 2 pièces de 2 euros (indiscernables). Utilisez les fonctions génératrices pour déterminer le nombre de façons différentes de payer l'addition de manière exacte. Votre solution ne doit pas être simplifiée.