

Introduction à la théorie de l'informatique

Répétition 10

Année académique 2011-2012

1. Soit la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie récursivement comme suit :

- $f(0) = 1$;
- $f(1) = 6$;
- $f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2) + 4$.

(a) Trouvez une solution analytique pour la fonction génératrice suivante :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n.$$

(b) Trouvez une solution analytique pour $f(n)$.

Suggestion : Trouvez a, b, c, d, e, g tels que

$$G(x) = \frac{a}{1+dx} + \frac{b}{1+ex} + \frac{c}{1+gx}.$$

2. Trouvez une solution analytique pour les fonctions génératrices correspondant aux séquences suivantes :

- (a) $\langle 2, 3, 5, 0, 0, 0, \dots \rangle$;
- (b) $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots \rangle$;
- (c) $\langle 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$;
- (d) $\langle 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \rangle$.

3. On souhaite dénombrer le nombre de façons de composer un panier de muffins en respectant certaines conditions.

- (a) Trouvez une fonction génératrice permettant de dénombrer les façons de composer le panier lorsque les restrictions suivantes sont d'application, ainsi qu'une solution analytique équivalente.
 - i. Tous les muffins sont au chocolat et il en faut au moins 3 dans le panier.

- ii. Tous les muffins sont au citron et il n'en faut pas plus que 2.
 - iii. Tous les muffins sont au coco et il en faut soit aucun, soit 2.
 - iv. Tous les muffins sont au sucre et il en faut un multiple de 4.
 - v. Les muffins sont au chocolat, au citron, au coco ou au sucre, et il en faut au moins 3 au chocolat, au plus 2 au citron, soit 0 soit 2 au coco, et un multiple de 4 au sucre.
- (b) Trouvez une solution analytique pour le nombre de choix de n muffins avec les restrictions posées en (a)v.