Introduction à la théorie de l'informatique

Solution à la question 6 de l'examen écrit du vendredi 13 janvier 2012

Enoncé

Un distributeur de boissons accepte uniquement les pièces de 1 cent, 2 cents et 5 cents. On vous demande de déterminer les fonctions génératrices à utiliser pour répondre aux quatre questions suivantes :

1. De combien de manières différentes peut-on insérer des pièces dans le distributeur pour acheter un article coûtant exactement r cents lorsque l'ordre d'insertion des pièces n'a pas d'importance ?
2. De combien de manières différentes peut-on insérer des pièces dans le distributeur pour constituer un montant inférieur ou égal à r cents lorsque l'ordre d'insertion des pièces n'a pas d'importance ?
3. De combien de manières différentes peut-on insérer n pièces (n étant fixé) dans le distributeur pour acheter un article coûtant r cents lorsque l'ordre d'insertion des pièces a de l'importance ? (*Suggestion :* commencez par écrire la fonction génératrice pour $n = 1$)
4. De combien de manières différentes peut-on insérer des pièces (en nombre quelconque) pour acheter un article coûtant r cents lorsque l'ordre d'insertion des pièces a de l'importance ?

Dans chaque cas, on vous demande de donner une formulation analytique de la fonction génératrice (c'est-à-dire sans sommation, ni "...") et de préciser la manière d'utiliser la fonction génératrice pour répondre à la question posée (sans faire explicitement le calcul).

Solution

1. Les fonctions génératrices pour le choix respectivement de pièces de 1, 2 et 5 cents sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{r=1}^{\infty} x^r = \frac{1}{1-x} \\
F_2(x) &= 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \sum_{r=1}^{\infty} x^{2r} = \frac{1}{1-x^2} \\
F_5(x) &= 1 + x^5 + x^{10} + \ldots = \sum_{r=1}^{\infty} x^{5r} = \frac{1}{1-x^5}
\end{aligned}$$

Le coefficient de x^r dans chacune de ces séries représente le nombre de façons de constituer un montant de r cents avec la pièce correspondante lorsque l'ordre d'insertion n'a pas d'importance.

Par la propriété de convolution, la fonction génératrice pour la constitution d'un montant de r cents à partir des trois types de pièces lorsque l'ordre d'insertion n'a pas d'importance est le produit de ces trois fonctions :

$$G_1(x) = F_1(x)F_2(x)F_5(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$$

Le nombre de manières d'insérer des pièces dans le distributeur pour acheter un article coûtant exactement r cents s'obtient en calculant le coefficient de x^r dans le développement de la fonction $G_1(x)$

Remarque. On peut faire une analogie directe avec le problème du panier de fruits vu au cours (transparent 375) :

- Montant de r cents = un panier de r fruits
- Pièce de 1 cent = un fruit qu'on peut mettre en nombre quelconque dans le panier
- Pièce de 2 cents = un fruit qu'on place dans le panier par paire
- Pièce de 5 cents = un fruit qu'on place dans le panier par multiple de 5

2. Soit g_i^1 le coefficient de x^i dans $G_1(x)$. Le coefficient de x^i de la fonction $G_2(x)$ recherchée est donné par :

$$g_i^2 = \sum_{k=0}^{i} g_k^1,$$

c'est-à-dire le nombre de manières de constituer exactement soit 0 cent, soit 1 cent, soit 2 cents, ..., soit i cents.

Par application de la propriété de sommation (transparent 357 du cours), on obtient directement $G_2(x)$ par :

$$G_2(x) = \frac{G_1(x)}{1-x}$$

Le nombre de manières d'insérer des pièces dans le distributeur pour constituer un montant inférieur ou égal à r cents lorsque l'ordre d'insertion des pièces n'a pas d'importance s'obtient en calculant le coefficient de x^r dans le développement de la fonction $G_2(x)$.

3. Pour $n = 1$, la fonction génératice est donnée par :

$$F(x) = (x + x^2 + x^5)$$

(Avec une seule pièce, on ne peut réaliser qu'un montant de 1, 2 ou 5 cents et il n'y a qu'une manière de le faire à chaque fois)

Pour un n arbitraire et l'ordre ayant de l'importance, la fonction génératrice est $G_3(x) = (F(x))^n = (x + x^2 + x^5)^n$ (pour chacune des n pièces, on a le choix entre 1 cent, 2 cents ou 5 cents).

Le nombre de manières d'insérer n pièces (n étant fixé) dans le distributeur pour acheter un article coûtant r cents lorsque l'ordre d'insertion des pièces a de l'importance s'obtient en calculant le coefficient de x^r dans $G_3(x)$.

4. On peut obtenir le montant en insérant soit 0, soit 1, soit 2, etc. pièces. La fonction génératrice recherchée est donc :

$$\begin{aligned} G_4(x) &= 1 + (x + x^2 + x^5) + (x + x^2 + x^5)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (x + x^2 + x^5)^n \\ &= \frac{1}{1 - (x + x^2 + x^5)}. \end{aligned}$$

Le nombre de manières d'insérer des pièces dans le distributeur pour acheter un article coûtant r cents lorsque l'ordre d'insertion des pièces a de l'importance s'obtient en calculant le coefficient de x^r dans $G_4(x)$.