Chapitre 8

Fonctions génératrices

Plan

1. Définitions et opérations élémentaires

2. Applications
   - Résolution de récurrences
   - Dénombrements

Lectures conseillées :

- MCS, Chapitre 15
- R. Sedgewick et P. Flagolet, *Analysis of Algorithms*, Addison-Wesley, 1995. `http://aofa.cs.princeton.edu/`.
- Cours "Analyse de structures de données et d'algorithmes" de C. Lavault `http://lipn.univ-paris13.fr/~lavault/Polys/Polymath.pdf`

Introduction

Les fonctions génératrices forment un lien entre l'analyse mathématique des fonctions à valeurs réelles, et les problèmes portant sur les *séquences*.

Motivation : Utiliser les fonctions génératrices pour résoudre des récurrences et des problèmes de dénombrement d'ensembles.

Notation : Dans ce chapitre, on dénotera les *séquences* en utilisant les symboles $\langle \ldots \rangle$.

Définition

Définition : La *fonction génératrice ordinaire* correspondant à la séquence infinie $\langle g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots \rangle$ est la *série formelle*

$$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n.$$

Notations :

- $\langle g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots \rangle \longleftrightarrow g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots$
- $[x^n]G(x)$ est le coefficient de x^n dans la séquence générée par $G(x)$.

Remarque : Les fonctions génératrices ne seront que très rarement évaluées. Dans ce chapitre, les questions de convergence n'ont donc en général pas d'importance.

Exemples :

- $\langle 0, 0, 0, 0, \ldots \rangle \longleftrightarrow 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 0$
- $\langle 1, 0, 0, 0, \ldots \rangle \longleftrightarrow 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 1$
- $\langle 3, 2, 1, 0, \ldots \rangle \longleftrightarrow 3 + 2x + 1x^2 + 0x^3 + \cdots = 3 + 2x + x^2$

Rappel : $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

On a donc :

- $\langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- $\langle 1, -1, 1, -1, \ldots \rangle \longleftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right) =$
  $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \right) - x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \right) = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$
- $\langle 1, a, a^2, a^3, \ldots \rangle \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n = \frac{1}{1-ax}$
- $\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$

Multiplication par une constante

Propriété : Si $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x)$, alors

$$\langle cf_0, cf_1, cf_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow c \cdot F(x).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\langle cf_0, cf_1, cf_2, \ldots \rangle \quad &\longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} cf_n x^n \\
&= \quad c \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \;=\; c \cdot F(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Addition

Propriété : Si

$$\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x) \quad \text{et} \quad \langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow G(x),$$

alors $\quad \langle f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x) + G(x).$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\langle f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots \rangle \quad &\longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) x^n \\
&= \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \right) \\
&= \quad F(x) + G(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Exemples

- Multiplication par une constante :

$$\langle 1,0,1,0,1,0,\ldots\rangle \longleftrightarrow 1+x^2+x^4+x^6+\ldots = \frac{1}{1-x^2}$$

  En multipliant la fonction génératrice par 2 :

$$\langle 2,0,2,0,2,0,\ldots\rangle \longleftrightarrow 2+2x^2+2x^4+2x^6+\ldots = \frac{2}{1-x^2}$$

- Addition :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & \langle & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \ldots & \rangle & \longleftrightarrow & \frac{1}{1-x} \\
+ & \langle & 1, & \text{-}1, & 1, & \text{-}1, & 1, & \text{-}1, & \ldots & \rangle & \longleftrightarrow & \frac{1}{1+x} \\
\hline
 & \langle & 2, & 0, & 2, & 0, & 2, & 0, & \ldots & \rangle & \longleftrightarrow & \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x} \\
 & & & & & & & & & & & = \frac{2}{1-x^2}
\end{array}$$

Décalage vers la droite

Propriété : Si $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x)$, alors

$$\langle \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ zéros}}, f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow x^k \cdot F(x).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\langle \overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{k \text{ zéros}}, f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \quad &\longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+k} \\
&= \quad x^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \;=\; x^k F(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Dérivation et intégration

Propriété : Si $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x)$, alors $\langle f_1, 2f_2, 3f_3, \ldots \rangle \longleftrightarrow F'(x)$.

Démonstration :

$$\langle f_1, 2f_2, 3f_3, \ldots \rangle \longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n f_n x^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{d}{dx} F(x)$$

$\square$

Propriété : Si $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x)$, alors
$\langle 0, f_0, \frac{f_1}{2}, \frac{f_2}{3}, \ldots, \frac{f_n}{n}, \ldots \rangle \longleftrightarrow \int_0^x F(t)dt$.

(Dérivation = multiplication par l'index et décalage vers la gauche
Intégration = division par l'index et décalage vers la droite)

Application

Exercice : Trouver une fonction génératrice pour la séquence $\langle 0, 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle$.

Réponse : Soit $F(x) = \dfrac{1}{1-x}$. On a successivement

- $\langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x)$
- $\langle 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle \longleftrightarrow F'(x)$
- $\langle 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle \longleftrightarrow x \cdot F'(x)$
- $\langle 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle \longleftrightarrow (x \cdot F'(x))'$
- $\langle 0, 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle \longleftrightarrow x \cdot (x \cdot F'(x))'$.

En développant, on obtient $\langle 0, 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle \longleftrightarrow \dfrac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^3}$.

Produit

Propriété :

Si $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow A(x)$ et $\langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow B(x)$, alors

$$\langle c_0, c_1, c_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow A(x) \cdot B(x),$$

où

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0.$$

Démonstration : Soient $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, on a

$$C(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Coefficients c_n :

	$b_0 x^0$	$b_1 x^1$	$b_2 x^2$	$b_3 x^3$	$\cdots$
$a_0 x^0$	$a_0 b_0 x^0$	$a_0 b_1 x^1$	$a_0 b_2 x^2$	$a_0 b_3 x^3$	$\cdots$
$a_1 x^1$	$a_1 b_0 x^1$	$a_1 b_1 x^2$	$a_1 b_2 x^3$	$\cdots$	
$a_2 x^2$	$a_2 b_0 x^2$	$a_2 b_1 x^3$	$\cdots$		
$a_3 x^3$	$a_3 b_0 x^3$	$\cdots$			
$\vdots$	$\cdots$				

($\langle c_0, c_1, c_2, \ldots \rangle$ est appelée la *convolution* des séquences $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ et $\langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle$)

Sommes partielles

Propriété : Si $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow A(x)$, alors

$$\langle s_0, s_1, s_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow \frac{A(x)}{1-x} \text{ où } s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \text{ pour } n \geq 0.$$

Démonstration : On a :

$$\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}.$$

Par la règle du produit, le $n$ième terme de $A(x)/(1-x)$ est donné par :

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

$\square$

Exemple : somme des carrés

Supposons qu'on veuille calculer $s_n = \sum_{i=0}^{n} i^2$ (voir chapitre 5).

On sait que (cf. transp. 408) :

$$\langle 0, 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle \longleftrightarrow \frac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^3}$$

Par la propriété précédente :

$$\langle s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots \rangle \longleftrightarrow \frac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^4}$$

s_n est donc le coefficient de x^n dans $\frac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^4}$.

Extraction des coefficients

Propriété (séries de Taylor) : Si $F(x)$ est la fonction génératrice pour la séquence

$$\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle,$$

alors

$$f_0 = F(0), \quad f_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \text{ pour } n \geq 1$$

Démonstration :
Directe en dérivant $F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$. $\square$

Exemple :

- $F(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{F^{(n)}(x)}{n!} = \frac{n!}{n!(1-x)^{n+1}} \Rightarrow \frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n!}{n!(1-0)^{n+1}} = 1$
- $F(x) = e^x \Rightarrow \frac{F^{(}n)(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$

Exemple : somme des carrés

- Calculons le $n$ième terme de
$$F(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{x}{(1-x)^4} + \frac{x^2}{(1-x)^4}.$$
- Par les propriétés d'addition et de décalage vers la droite, le coefficient de x^n dans $F(x)$ est donc le coefficient de x^{n-1} dans $\frac{1}{(1-x)^4}$ et le coefficient de x^{n-2} dans $\frac{1}{(1-x)^4}$.
- Soit $G(x) = 1/(1-x)^4$,
$$G^{(n)}(x) = \frac{(n+3)!}{6(1-x)^{n+4}} \Rightarrow \frac{G^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$
- Finalement :
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

Formule de Newton généralisée

Soit la fonction génératrice $F(x) = (1+x)^\alpha$, avec $\alpha > 0$. On a :

$$F^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

dont on déduit :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n$$

où

$$C_\alpha^n = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)}{n!}.$$

Dans le cas où $\alpha = k$ est un entier, on retrouve la formule du binôme de Newton :

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} C_k^n x^n,$$

avec $C_k^n = \frac{k!}{(k-n)!n!}$. En d'autres mots :

$$\langle C_k^0, C_k^1, C_k^2, \dots, C_k^k, 0, 0, 0, \dots \rangle \longleftrightarrow (1+x)^k$$

Synthèse : fonctions génératrices usuelles

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+\alpha}^n x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1-\lambda x} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$$

$$\frac{x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} C_n^2 x^n$$

$$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} C_n^m x^n$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1} \frac{x^n}{n}$$

Exercice : prouvez les

Synthèse : opérations entre fonctions génératrices

Soit $U(x)$, $V(x)$, et $W(x)$ des fonctions génératrices avec $[x^n]U(x) = u_n$, $[x^n]V(x) = v_n$ et $[x^n]W(x) = w_n$.

$$
\begin{aligned}
w_n = \alpha u_n + \beta v_n \quad &\Leftrightarrow \quad W(x) = \alpha U(x) + \beta V(x) \\
w_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k \quad &\Leftrightarrow \quad W(x) = U(x)V(x) \\
v_n = u_{n-k} \quad &\Leftrightarrow \quad V(x) = x^k U(x) \\
v_n = u_n - u_{n-1} \text{ et } v_o = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad V(x) = (1-x)U(x) \\
v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad &\Leftrightarrow \quad V(x) = \frac{U(x)}{1-x} \\
v_n = (n+1)u_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad V(x) = \frac{d}{dx} U(x) \\
v_n = \frac{u_{n-1}}{n} \text{ et } v_0 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad V(x) = \int_0^x U(t)dt
\end{aligned}
$$

Exercice : prouvez les