Introduction à la théorie de l'informatique

Répétition 12

Année académique 2012-2013

1. On souhaite dénombrer le nombre de façons de composer un panier de muffins en respectant certaines conditions.
   (a) Trouvez une fonction génératrice permettant de dénombrer les façons de composer le panier lorsque les restrictions suivantes sont d'application, ainsi qu'une solution analytique équivalente.
      i. Tous les muffins sont au chocolat et il en faut au moins 3 dans le panier.
      ii. Tous les muffins sont au citron et il n'en faut pas plus que 2.
      iii. Tous les muffins sont au coco et il en faut soit aucun, soit 2.
      iv. Tous les muffins sont au sucre et il en faut un multiple de 4.
      v. Les muffins sont au chocolat, au citron, au coco ou au sucre, et il en faut au moins 3 au chocolat, au plus 2 au citron, soit 0 soit 2 au coco, et un multiple de 4 au sucre.
   (b) Trouvez une solution analytique pour le nombre de choix de n muffins avec les restrictions posées en (a).

2. En utilisant les fonctions génératrices, trouvez le nombre de solutions de l'équation $a + b + c + d = 50$ si toutes les variables sont
   (a) entières non-négatives
   (b) entières strictement positives
   (c) entières strictement positives et impaires
   (d) entières et comprises entre 4 et 10 (inclus)

3. On admettra que l'ensemble des séquences de 0 et 1 qui ne contiennent ni 101 ni 111 est décrit par

$$0^* \cup (0^*(1 \cup 11)\,(000^*(1 \cup 11))^*\,0^*)$$

   et que toute séquence s'écrit de façon unique. On note a_n le nombre de séquences de taille n et $A(x)$ la fonction génératrice associée.

(a) Montrer que $A(x) = \frac{1+x+2x^2+x^3}{1-x-x^3-x^4}$.

(b) Sur base de $A(x)$, montrer que $a_n = a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}$ pour $n \geqslant 4$ ainsi que les conditions initiales.

(c) Sur base de la factorisation $1-x-x^3-x^4 = (1-x-x^2)(1+x^2)$, montrer que
$$a_n = \frac{7F_{n+1}+4F_n-b_n}{5}\ ,$$
où
$$b_n = \begin{cases} 2(-1)^{n/2}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2(-1)^{(n-1)/2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
Pour rappel, les nombres de Fibonacci sont définis par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geqslant 2)$ et leur fonction génératrice est $\frac{1}{1-x-x^2}$.

(d) Montrer par récurrence que
$$a_{2n} = F_{n+2}^2 \text{ et } a_{2n+1} = F_{n+2}F_{n+3}$$
pour tout $n \geqslant 0$.

4. Soit des mots w de longueur $|w| = n$ construits sur un alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, qu'on suppose transmis par un canal de communication. On note M_n le nombre de mots de longueur n qui ne contiennent pas deux symboles a consécutifs.

   (a) Déterminer M_1,M_2, et M_3. En déduire une relation de récurrence sur les M_n pour $n \geq 1$. Que dire de M_0 ?

   (b) Résoudre l'équation de récurrence pour M_n en utilisant les fonctions génératrices.

5. Soit a_k le nombre de façons de distribuer k boules identiques dans 7 boîtes distinctes si la première boîte ne peut pas contenir plus de deux boules :

   (a) Trouver la fonction génératrice pour a_k

   (b) Trouver a_k.