INTRODUCTION À LA THÉORIE DE L'INFORMATIQUE

ANNÉE ACADÉMIQUE 2013-2014
RÉPÉTITION 3

Induction structurelle.

(1) Le miroir d'une chaîne de caractères est la chaîne écrite à l'envers. Par exemple, le miroir de "blanche neige" est "egien ehcnalb".

(a) Donner une définition récursive de la fonction `miroir` sur l'ensemble A^* des chaînes écrites sur l'alphabet A (cf. cours théorique).

(b) Montrer au moyen d'une induction structurelle que

$$\texttt{miroir}(ts) = \texttt{miroir}(s)\texttt{miroir}(t)$$

pour toutes chaînes $s, t \in A^*$.

(c) Donner une définition récursive du sous-ensemble suivant de A^* :

$$P = \{s \in A^* : \texttt{miroir}(s) = s\} \ .$$

(2) L'ensemble **F18** des fonctions élémentaires d'une variable réelle est défini récursivement de la façon suivante :
— La fonction id : $x \mapsto x$ est dans **F18** ;
— Les fonction constantes $k : x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$) sont dans **F18** ;
— La fonction sin : $x \mapsto \sin(x)$ est dans **F18** ;
— Si f et g sont dans **F18**, alors les fonctions

$$f.g \ , \quad f+g \ , \quad 2^f \ , \quad f^{-1} \ , \quad f \circ g$$

aussi.

(a) Montrer que la fonction inv : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dans **F18**.

(b) Montrer au moyen d'une induction structurelle que l'ensemble **F18** contient les dérivées de tous ses éléments (montrer que si f est dans **F18**, alors $f' = \frac{df}{dx}$ aussi).

(3) (a) Proposer une définition récursive de l'ensemble

$$L = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a-b) \text{ est multiple de } 3\}$$

(b) Prouver au moyen d'une induction structurelle que l'ensemble L' correspondant à votre définition récursive est inclus dans L.

(c) Inversement, montrer que $L \subset L'$.

(d) Déterminer si votre définition récursive est ambigüe. Dans l'affirmative, discuter la possibilité d'éliminer des règles inductives en vue de la rendre non ambigüe.

(4) Montrer au moyen d'une induction structurelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n.F_{n+1} \ ,$$

où la notation F_i désigne le $i^{\text{ème}}$ nombre de la suite de Fibonacci.