

# Introduction à la théorie de l'informatique

## Répétition 7

Année académique 2013-2014

1. Dans le raisonnement suivant, où se trouve l'erreur ?

**Faux théorème.** Soit  $G = (V, E)$ , avec  $|V| \geq 3$ , un graphe dont tous les sommets sont au moins de degré 2. Le graphe  $G$  contient un cycle de longueur 3.

**Fausse démonstration.** La démonstration fonctionne par induction sur le nombre de sommets.

*Cas de base :* Si  $|V| = 3$ , le théorème est vrai. En effet, n'importe quel graphe avec 3 sommets de degrés supérieurs ou égaux à 2 est nécessairement un cycle de longueur 3.

*Cas inductif :* Soit  $G$  un graphe de  $n$  sommets pour lequel le théorème est vrai. On construit un nouveau graphe  $G'$  en ajoutant à  $G$  un nouveau sommet et au moins 2 arêtes incidentes à ce sommet. Puisque  $G$  contient un cycle de longueur 3,  $G'$  contient aussi un cycle de longueur 3.

Par induction, le théorème est vrai pour tout graphe dont le nombre de sommets est supérieur ou égal à 3.  $\square$

2. Soit  $G$  un graphe dont tous les sommets sont au moins de degré  $d$ . Démontrez que  $G$  contient un chemin de longueur  $d$ .
3. Soit  $G$  un graphe. Démontrez que
  - (a) si tous les sommets de  $G$  sont de degré 2, alors  $G$  contient un cycle.
  - (b) si  $G$  est non connexe, alors son complément est connexe.

*Remarque :* le complément d'un graphe  $(V, E)$  est le graphe

$$(V, \{\{x, y\} \mid x, y \in V \wedge x \neq y\} \setminus E).$$