INFO2050 - Programmation avancée

Répétition 1: Pseudo-code et complexité

Jean-Michel Begon

25 septembre 2015

Exercice 1

Que fait cette fonction ?

```
MYSTÈRE(A)
if A.length < 2
    return True
else
    if A[1] == A[A.length]
        return MYSTÈRE(A[2..A.length − 1])
    else
        return False
```

Exercice 2

(a) Ecrire le pseudo-code d'une fonction itérative permettant de déterminer la valeur minimale des éléments d'un tableau. Réécrire ensuite cette fonction de façon récursive.

(b) Ecrire le pseudo-code d'une fonction récursive permettant de calculer les nombres de Motzkin :

$$M_i = \begin{cases} 1, & i = 0, i = 1 \\ \dfrac{3(n-1)M_{n-2} + (2n+1)M_{n-1}}{n+2}, & \forall i \in \mathbb{N}, i > 1 \end{cases}$$

Exercice 3

(a) L'algorithme A nécessite $10n^3$ opérations pour résoudre un problème. L'algorithme B résout le même problème en $1000n^2$ opérations. Quel est l'algorithme le plus rapide ?

(b) L'algorithme A nécessite $32n \log_2 n$ opérations pour résoudre un problème. L'algorithme B résout le même problème en $3n^2$ opérations. Quel est l'algorithme le plus rapide ?

Exercice 4

Soit un algorithme dont le temps d'exécution pour $N = 1000$, 2000, 3000 et 4000 est respectivement de $5s$, $20s$, $45s$ et $80s$. Estimez le temps d'exécution pour $N = 5000$.

Exercice 5

(a) Montrer que $2n + 100$ est $\Theta(n)$.

(b) Montrer que $5n^2 + 500n + 5000$ est $\Theta(n^2)$.

(c) Montrer que 2^{n+1} est $\Theta(2^n)$.

(d) Expliquer pourquoi la phrase *"Le temps d'exécution d'un algorithme A est au moins $O(n^2)$"* n'a aucun sens.

(e) Montrer que le temps d'exécution d'un algorithme est $\Theta(g(n))$ si et seulement si le temps d'exécution du pire cas est $O(g(n))$ et le temps d'exécution du meilleur cas est $\Omega(g(n))$.

(f) Donner un exemple de fonction $f(n)$ qui ne soit ni $O(n)$ ni $\Omega(n)$.

Exercice 6

Classer ces fonctions par ordre de complexité (selon les opérateurs $\Theta(.)$, $O(.)$ et $\Omega(.)$).

$n \log_2 n$	$\frac{4}{n}$	$\sqrt{n}$	2^{2^n}
$\log_2 \log_2 n$	$8n^3$	$8^{\ln n}$	$\frac{n}{2+n}$
$\log_2 n^7$	$5^{\ln \log_2 n}$	$(\log_2 n)^3$	$\frac{n}{\log_2(2+n)}$

Exercice 7

Pour chacun des pseudo-codes suivants, déterminer ce que fait l'algorithme, puis la complexité asymptotique en termes de n. (Soyez le plus précis possible sur les notations).

```
CODE1(n)
limit = n * n
sum = 0
for i = 1 to limit
    sum = sum + 1
return sum
```

```
CODE2(n)
i = 1
limit = n * n * n
sum = 0
while i < limit
    sum = sum + 1
    i = i * 2
return sum
```

```
CODE3(a, b, c, n)
for i = 1 to n
    for j = 1 to n
        a[i][j] = 0
        for k = 1 to n
            a[i][j] = a[i][j] + b[i][k] * c[k][j]
```

Exercice 8

Soit un tableau A de n valeurs classées dans l'ordre croissant. On se propose de rechercher si une valeur b est présente dans ce tableau.

(a) Ecrire le pseudo-code d'un algorithme brutal pour rechercher la valeur b. Analyser sa complexité dans le meilleur cas et dans le pire cas.

(b) Proposer un algorithme dichotomique pour trouver la valeur b. Analyser sa complexité dans le meilleur cas et dans le pire cas.

Exercice 9

Soit un tableau de N entiers où chaque entier de l'intervalle $1..N$ apparaît exactement une fois, à l'exception d'un entier apparaissant 2 fois et d'un entier manquant. Proposer un algorithme linéaire pour trouver l'entier manquant, en utilisant au plus $O(1)$ d'espace mémoire supplémentaire.

Bonus

Bonus 1

Le projet Euler (`https://projecteuler.net/`) est une collection de problèmes informatiques demandant des implémentations efficaces. Le 4e problème est le suivant :

> *"Un nombre-palindrome indique la même valeur qu'on le lise de droite à gauche ou de gauche à droite.*
> *Le plus grand palindrome résultant du produit de deux nombres à deux chiffres est* $9009 = 91 \times 99$.
> *Trouver le plus grand palindrome résultant du produit de deux nombres à trois chiffres."*

Proposer un algorithme pour le résoudre.

Bonus 2

Soit un tableau $N \times N$ de booléens (`0` ou `1`). Proposer un algorithme pour trouver le plus grand sous-tableau contigu contenant uniquement des valeurs `1`.

Exemple : Le tableau suivant contient un sous-tableau 4×4 contigu ne contenant que des `1`.

```
1 0 1 1 1 0 0 0
0 0 0 1 0 1 0 0
0 0 1 1 1 0 0 0
0 0 1 1 1 0 1 0
0 0 1 1 1 1 1 1
0 1 0 1 1 1 1 0
0 1 0 1 1 1 1 0
0 0 0 1 1 1 1 0
```