INFO0054 - Programmation fonctionnelle

Projet: Suite de Sturm et racines d'un polynôme

Jean-Michel Begon

2017-2018

Le but du projet est d'utiliser le théorème de Sturm afin de compter le nombre de racines d'un polynôme rationnel sur un intervalle donné.

1 Suite de Sturm

Soit un polynôme $P(x)$ à coefficients rationnels ne possédant que des racines simples. On définit la suite de polynômes suivante :

$$P_i(x) = \begin{cases} P(x), & \text{si } i = 0 \\ P'(x), & \text{si } i = 1 \\ -\left(P_{i-2} \mod P_{i-1}\right), & \text{si } i > 1 \end{cases} \tag{1}$$

où $P'(x)$ est la dérivée de $P(x)$ et $P_l \mod P_k$ représente le reste de la division euclidienne du polynôme P_l par le polynôme P_k.

Suite de Sturm La suite de Sturm de $P(x)$ est la suite finie $P_0(x), P_1(x), \ldots P_m(x)$ telle que $P_m(x)$ est le dernier reste non nul.

Théorème de Sturm Le théorème de Sturm énonce que le nombre de racines distinctes d'un polynôme $P(x)$ sur un intervalle $]a, b]$ est égal à la différence du nombre de changements de signes dans la suite de Sturm aux bords de l'intervalle.

Formellement, soit $\sigma_P(z)$ le nombre de changements de signes dans la suite

$$P_0(z), P_1(z), \ldots, P_m(z)$$

le nombre de racines de $P(x)$ dans l'intervalle $]a, b]$ est

$$\sigma_P(a) - \sigma_P(b) \tag{2}$$

Exemple Soit $P(x) = 2x^2 + x - 8$. Combien existe-t-il de racines distinctes entre -5 et 5 ?

La suite de Sturm de $P(x)$ est

$$P_0(x) = 2x^2 + x - 8$$
$$P_1(x) = 4x + 1$$
$$P_2(x) = \frac{65}{8}$$

L'évaluation en -5 donne la suite : $37, -19, 65/8$. Il y a donc $\sigma_P(-5) = 2$ changements de signes. L'évaluation en 5 donne la suite $47, 21, 65/8$. Il y a donc $\sigma_P(5) = 0$ changement de signes.

Sur l'intervalle $]-5, 5]$ il y a $\sigma_P(-5) - \sigma_P(5) = 2 - 0 = 2$ racines distinctes.

2 Consignes

On vous demande d'implémenter les différentes étapes de cet algorithme en `Scheme`. Pour ce faire, complétez le fichier `sturm.scm` fourni. Celui-ci impose de définir les fonctions suivantes :

`p%q` qui retourne le polynôme reste de la division euclidienne de son premier argument par son second, tous deux des polynômes.

`sturm-chain` qui retourne une liste contenant les termes de la suite de Sturm.

`count-roots` qui retourne le nombre de racines distinctes d'un polynôme dans un intervalle donné.

La spécification exacte est fournie dans le fichier. Notez que tous les polynômes sont à représenter par la liste de leurs coefficients par ordre croissant de degré. Le polynôme $P(x) = 2x^2 + x - 8$ est donc représenté par la liste `'(-8 1 2)`.

Vous devez spécifier toutes les fonctions auxiliaires. La qualité des spécifications intervient dans la note.

Ce projet *individuel* est à rendre pour le *30 avril, 23h59* sous la forme d'un archive `tar.gz` via la plateforme de soumission de Montéfiore (`https://submit.montefiore.ulg.ac.be`). En plus du fichier `sturm.scm`, vous devez remettre un court rapport au format PDF répondant à la question suivante :

1. Peut-on étendre la méthode de Sturm au cas des polynômes à coefficients réels ?
   — Si oui, justifiez votre réponse.
   — Si non, fournissez un contre-exemple et expliquez pourquoi.

Dans votre rapport, vous pouvez également détailler tout ce que vous jugerez opportun.

3 Bonus

Proposez un algorithme qui retourne la liste des racines sur un intervalle fini pour une précision donnée. On considérera que des racines peuvent être indistinguables si la distance qui les sépare est inférieure à la précision.

Bon travail